



SZYMON SAMBORSKI

PRYWATNE KOREPETYCJE

Poziom: SZKOŁA ŚREDNIA
Zakres: POZIOM PODSTAWOWY

KARTA PRACY nr 1

LICZBY RZECZYWISTE

Potęgi i pierwiastki (własności, upraszczanie wyrażeń i działania)

Pigułka wiedzy: Własności potęg i pierwiastków

1. Działania na potęgach (dla tej samej podstawy lub wykładnika):

- Mnożenie i dzielenie potęg o tej samej podstawie: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ oraz $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- Potęgowanie potęgi: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- Potęga o wykładniku ujemnym odwraca podstawę: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$

2. Działania na pierwiastkach i częste błędy:

- Mnożenie i dzielenie można włączać pod wspólny pierwiastek: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ oraz $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
- **Częsty błąd!** Nie wolno rozdzielać pierwiastka względem dodawania i odejmowania: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Na przykład $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, a nie $3+4=7$.
- Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka polega na rozkładzie liczby na czynniki, np. $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$.

Wzorcowe przykłady

Przykład 1. Uprość wyrażenie i przedstaw wynik w postaci potęgi liczby 2: $\frac{(2^3)^4 \cdot 2^{-5}}{2^4}$

Rozwiązanie:

- 1) Najpierw podnosimy potęgę do potęgi w liczniku: $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$.
- 2) Wykonujemy mnożenie w liczniku (dodajemy wykładniki): $2^{12} \cdot 2^{-5} = 2^{12+(-5)} = 2^7$.
- 3) Na koniec dzielimy potęgi (odejmujemy wykładniki): $\frac{2^7}{2^4} = 2^{7-4} = 2^3$.

Przykład 2. Oblicz wartość wyrażenia: $\sqrt{50} - \sqrt{18} + \sqrt{2}$

Rozwiązanie:

Aby móc dodawać i odejmować pierwiastki, musimy mieć tę samą liczbę pod znakiem pierwiastka.

Wyłączamy czynniki przed znak pierwiastka:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

Podstawiamy do wyrażenia:

$$5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 1\sqrt{2} = (5 - 3 + 1)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Zestaw zadań

Zadanie 1. Oblicz wartości potęg i pierwiastków w pamięci:

- a) 3^4
- b) $(-2)^5$
- c) $\sqrt{144}$
- d) $\sqrt[3]{-8}$

Zadanie 2. Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi, korzystając z poznanych własności:

- a) $5^3 \cdot 5^4$
- b) $\frac{7^8}{7^6}$
- c) $(2^3)^2 \cdot 2^{-4}$
- d) $3^5 \cdot 3^5$

Zadanie 3. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka lub wykonaj podane działania:

- a) $\sqrt{20}$
- b) $\sqrt{27} + \sqrt{12}$
- c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$
- d) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$

Zadanie 4. Oblicz wartość wyrażen (pamiętaj o odpowiednich własnościach potęg i potęgach ujemnych):

- a) 4^{-2}
- b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$
- c) $\frac{2^5 \cdot 8^2}{4^3}$ (Wskazówka: Zamień podstawy na potęgę liczby 2)

Zadanie 5. Uprość wyrażenia pierwiastkowe i potęgowe:

- a) $\sqrt{32} - 2\sqrt{8} + \sqrt{2}$
- b) Usuń niewymierność z mianownika: $\frac{6}{\sqrt{3}}$
- c) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$

Zadanie 6. Długość boku kwadratu wynosi $a = 2\sqrt{5}$ cm. Zapisz odpowiednie działania i oblicz obwód oraz pole tego kwadratu.

Zadanie 7. Objętość sześciennej kostki wynosi 64 cm^3 . Oblicz długość krawędzi tego sześcianu, a następnie wyznacz jego pole powierzchni całkowitej.

Zadanie 8. Naukowcy badają populację pewnej bakterii. Początkowo w próbce znajdowało się 1000 bakterii, a ich liczba podwaja się co każdą godzinę. Zapisz wyrażenie za pomocą potęgi i oblicz, ile bakterii będzie w próbce po 5 godzinach.

Klucz odpowiedzi

Wyniki ostateczne

Zadanie 1.

a) 81 b) -32 c) 12 d) -2

Zadanie 2.

a) 5^7 b) 7^2 c) 2^2 d) 3^{10}

Zadanie 3.

a) $2\sqrt{5}$ b) $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ c) $\sqrt{16} = 4$ d) $\sqrt{25} = 5$

Zadanie 4.

a) $\frac{1}{16}$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$ c) $\frac{2^5 \cdot 2^6}{2^6} = 2^5 = 32$

Zadanie 5.

a) $4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2}$ b) $\frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ c) $3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$

Zadanie 6.

Obwód: $4 \cdot 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$ cm.

Pole: $P = (2\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20$ cm².

Zadanie 7.

Długość krawędzi $a = \sqrt[3]{64} = 4$ cm.

Pole powierzchni całkowitej sześcianu to 6 kwadratów, czyli $P_c = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 4^2 = 6 \cdot 16 = 96$ cm².

Zadanie 8.

Liczba bakterii: $1000 \cdot 2^5 = 1000 \cdot 32 = 32000$.

Wskazówka: Zwróćcie uwagę na Zadanie 4c. Zamiana podstaw (np. $8 = 2^3$ oraz $4 = 2^2$) jest kluczowa do uproszczenia całego ułamka na jednej podstawie, co chroni przed żmudnymi obliczeniami na dużych liczbach.