

KARTA PRACY nr 6

LICZBY RZECZYWISTE

Potęgi i pierwiastki – trening rozszerzony (własności i zastosowania)

Pigułka wiedzy: Rozszerzone działania

1. Potęga o wykładniku ujemnym i zerowym:

- Dowolna liczba (różna od zera) podniesiona do potęgi zerowej daje 1, np. $5^0 = 1$.
- Wykładnik ujemny odwraca nam podstawę potęgi: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$.

2. Działania na pierwiastkach i wyłączanie czynnika:

- Pamiętaj, że pierwiastki możemy dodawać/odejmować tylko wtedy, gdy pod znakiem pierwiastka znajduje się ta sama liczba (np. $2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$).
- Aby wyłączyć czynnik przed znak pierwiastka, szukamy w liczbie podpierwiastkowej ukrytego kwadratu (dla $\sqrt{}$) lub sześciastu (dla $\sqrt[3]{}$), np. $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$.

Wzorcowe przykłady

Przykład 1. Przedstaw w postaci jednej potęgi: $\frac{4^3 \cdot 2^5}{8^2}$

Rozwiązanie:

- 1) Zauważamy, że wszystkie podstawy (4, 2, 8) można zamienić na potęgi liczby 2.
- 2) $4 = 2^2$, więc $4^3 = (2^2)^3 = 2^6$.
- 3) $8 = 2^3$, więc $8^2 = (2^3)^2 = 2^6$.
- 4) Podstawiamy do ułamka: $\frac{2^6 \cdot 2^5}{2^6}$.
- 5) Wykonujemy działania: $\frac{2^{11}}{2^6} = 2^{11-6} = 2^5$.

Przykład 2. Oblicz: $\sqrt{3^2 + 4^2}$

Rozwiązanie:

Nie możemy rozdzielić pierwiastka na dodawanie! Najpierw potęgujemy liczby pod pierwiastkiem, a potem je sumujemy:

$$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Zestaw zadań

Zadanie 1. Oblicz wartości podanych potęg i pierwiastków:

- a) $\sqrt{81}$
- b) $\sqrt[3]{64}$
- c) 2^6
- d) $(-3)^3$
- e) 5^0
- f) 4^{-1}
- g) $\sqrt{\frac{16}{25}}$
- h) $\sqrt[3]{-1000}$

Zadanie 2. Wstaw znak $<$, $>$ lub $=$, aby otrzymać zdanie prawdziwe:

- a) $2^3 \dots 3^2$
- b) $\sqrt{25} \dots 5$
- c) $4^3 \dots 2^6$
- d) $\sqrt{20} \dots 4,5$
- e) $5^{-2} \dots 0,04$
- f) $(-2)^4 \dots -16$
- g) $\sqrt[3]{27} \dots \sqrt{9}$
- h) $0,1^2 \dots 0,01$

Zadanie 3. Przedstaw wyrażenie w postaci jednej potęgi:

- a) $7^3 \cdot 7^4$
- b) $\frac{5^8}{5^2}$
- c) $(2^4)^3$
- d) $3^{-2} \cdot 3^5$
- e) $6^7 : 6^{-3}$
- f) $(4^{-2})^{-3}$
- g) $\frac{2^5 \cdot 2^2}{2^4}$
- h) $8^2 \cdot 2^3$ (Wskazówka: sprowadź do podstawy 2)

Zadanie 4. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka:

- a) $\sqrt{12}$
- b) $\sqrt{18}$
- c) $\sqrt{50}$
- d) $\sqrt{75}$
- e) $\sqrt{45}$
- f) $\sqrt[3]{16}$
- g) $\sqrt[3]{24}$
- h) $\sqrt{200}$

Zadanie 5. Wykonaj działania na pierwiastkach i uprość wynik:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

b) $\sqrt{27} : \sqrt{3}$

c) $2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}$

d) $\sqrt{5^2 - 4^2}$

e) $(\sqrt{7})^2$

f) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2}$

g) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$

h) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

Zadanie 6. Kwadrat ma bok długości $3\sqrt{2}$ cm. Oblicz pole powierzchni oraz obwód tego kwadratu.

Zadanie 7. W laboratorium badawczym liczba pewnych bakterii potraja się w ciągu każdej godziny. Jeśli na początku eksperymentu w próbce znajdowały się 2 bakterie, to ile bakterii będzie w niej po upływie 4 godzin? Zapisz odpowiednie wyrażenie z użyciem potęgi.

Zadanie 8. Akwarium ma kształt sześcianu, a jego pojemność wynosi 125 litrów (pamiętaj, że 1 litr = 1 dm^3). Oblicz długość krawędzi tego akwarium w decymetrach oraz wyznacz sumę długości wszystkich jego krawędzi.

Klucz odpowiedzi

Wyniki ostateczne

Zadanie 1.

a) 9 b) 4 c) 64 d) -27 e) 1 f) $\frac{1}{4}$ g) $\frac{4}{5}$ h) -10

Zadanie 2.

a) $<$ ($8 < 9$) b) $=$ c) $=$ ($64 = 64$) d) $<$ (bo $\sqrt{20} < \sqrt{20,25}$) e) $=$ f) $>$ ($16 > -16$) g) $=$ ($3 = 3$) h) $=$

Zadanie 3.

a) 7^7 b) 5^6 c) 2^{12} d) 3^3 e) 6^{10} f) 4^6 g) 2^3 h) 2^9 (bo $(2^3)^2 \cdot 2^3 = 2^6 \cdot 2^3$)

Zadanie 4.

a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $5\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{5}$ f) $2\sqrt[3]{2}$ g) $2\sqrt[3]{3}$ h) $10\sqrt{2}$

Zadanie 5.

a) $\sqrt{16} = 4$ b) $\sqrt{9} = 3$ c) $6 \cdot 5 = 30$ d) $\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$ e) 7 f) $7\sqrt{2}$ g) $\sqrt[3]{125} = 5$ h) $\sqrt{25} = 5$

Zadanie 6.

Pole: $P = (3\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18 \text{ cm}^2$.

Obwód: $L = 4 \cdot 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \text{ cm}$.

Zadanie 7.

Zapis: $2 \cdot 3^4$. Obliczenia: $2 \cdot 81 = 162$. Po 4 godzinach będą 162 bakterie.

Zadanie 8.

Objętość $V = a^3 = 125 \text{ dm}^3$. Krawędź $a = \sqrt[3]{125} = 5 \text{ dm}$.

Sześcian ma 12 krawędzi, więc suma długości to $12 \cdot 5 = 60 \text{ dm}$.